L'EVOLUZIONE DELLA GEOMETRIA NEL SECOLO XIX E CONSEGUENZE DIDATTICHE

Summary:

Part 1.-

The geometry in the Italian schools to-day
The peculiar method of geometrical activity
Geometry as an educational task.
Geometrical activities as factors of creativity.
Great moments in the history of geometry in the 19 Century
Projective geometry
The search for new symbolisms and the geometry of the transformations
The Symmetry

Part 2.-

Examples and problems.

Carlo Felice Manara

VOL. 17A - 17B N.6
NOVEMBRE - DICEMBRE 1994

Carlo Felice Manara

L'EVOLUZIONE DELLA GEOMETRIA NEL SECOLO XIX E CONSEGUENZE DIDATTICHE.

PARTE PRIMA.

SOMMARIO

Haec semper frondere et florescere
Caetera nasci occidere fluere labi.

1 - La geometria nella scuola italiana di oggi.

Ringrazio gli organizzatori di questo seminario, che mi hanno invitato a parlare sulla geometria. Per essere sincero fino in fondo, devo confessare che ho accettato con l'impressione di dover parlare di una Cenerentola. Per dare un'idea del significato di questa mia affermazione, volutamente paradossale e pittoresca nella forma, basti ricordare ciò che è accaduto quest'anno in occasione degli scritti degli esami di maturità per il Liceo scientifico. E' noto che i quesiti erano tre, e che uno di questi (il secondo) verteva su contenuti collegati con la geometria dello spazio; orbene questo è stato svolto da una frazione molto piccola dei candidati. Le reazioni successive, dei candidati e delle loro famiglie, sono state a dir poco di indignazione, fondata sul fatto che gli argomenti non erano stati svolti nell'ultimo anno, che si trattava di cose troppo difficili ed altre analoghe proteste, accompagnate dai soliti progetti di azioni legali presso i vari TAR; i quali, in quest'epoca dell'anno, sono sommersi dai ricorsi dei candidati che si ritengono, a torto o a ragione, seviziati dalle commissioni di esame. A mio parere, il quesito poteva essere svolto da ogni persona che abbia una capacità minima di immaginarsi le cose nello spazio, e con la cultura sufficiente a svolgere il lavoro di un capomastro (ovviamente intelligente), almeno per quanto riguarda l'impostazione iniziale dei calcoli.

Ovviamente la colpa di questo stato di cose non è soltanto dalla parte dei ragazzi; essi vogliono avere la sicurezza di possedere degli strumenti facili e sicuri per risolvere qualunque quesito di un certo tipo; strumenti da poter applicare anche senza capire gran che delle teorie sottostanti.

Di conseguenza, benché esistano delle premesse ai programmi di insegnamento che raccomandano (giustamente) uno svolgimento intelligente dei programmi stessi, è facile accorgersi che la autorità centrali impongono praticamente certi contenuti ed una certa strategia didattica, proponendo, per decenni, anno dopo anno, sempre degli esercizi scritti dello stesso tipo; a questo stato di cose si adegua ovviamente anche la manualistica, il cui livello va progressivamente degradando, fino a raggiungere dei minimi impressionanti (e non si tratta delle opere meno diffuse).

Abbiamo ricordato poco sopra i programmi di insegnamento; questi portano anche un capitolo intitolato "Geometria delle trasformazioni", e la presenza di questa dicitura potrebbe far sperare che il concetto di trasformazione possa essere svolto ed applicato in modo da conferire ai discenti una apertura mentale nuova rispetto all'insegnamento tradizionale, che privilegia di gran lunga, nello svolgimento dei programmi e nella pratica del lavoro didattico di moltissimi docenti, gli sviluppi algebrici formali e le corrispondenti procedure, presentate acriticamente e supinamente adottate ed applicate. Ma questa speranza si è presto dimostrata illusoria, perché in molta manualistica esistente il capitolo delle trasformazioni è stato aggiunto e, per così dire, incastrato, senza modificare l'impianto generale del testo, anzi con la esplicita ed evidente volontà di non farlo.

2 - Il metodo generale della geometria.

E' noto che il capitolo finale dell'opera fondamentale di Cartesio, il "Discorso sul metodo", tratta della geometria, e del nuovo aspetto che questa dottrina poteva assumere, qualora si tenesse conto delle considerazioni esposte dall'autore nelle pagine precedenti. Le esposizioni che vengono fatte nei corsi abituali di filosofia dell'opera cartesiana ignorano spesso la pagine dedicate alla geometria; pagine che invece sono ritenute fondamentali dai matematici. In particolare è noto che la dottrina che si incontra in germe presso Cartesio, da lui esplicitamente indicata come un metodo, è chiamata oggi "geometria analitica"; e ciò costituisce un richiamo a quello che era stato presentato come il metodo generale della geometria, ed addirittura della matematica nella sua interezza. Tale metodo era stato codificato da Euclide, e poi da Pappo, mettendo in evidenza due momenti, della ricerca delle verità e della soluzione dei problemi. I momenti erano e possono ancora oggi essere chiamati di "analisi" e di "sintesi"; l'operazione di analisi, per la soluzione di un problema, parte da una situazione nella quale si immagina il problema stesso risolto, e da questa situazione innesca una catena di deduzioni, le quali conducono alla dimostrazione di condizioni necessarie per la soluzione; tali soluzioni conducono ad altri problemi, che sono conseguenze del primo; e la catena di deduzioni si conclude quando si giunga ad un problema che si sa risolvere.

Le eventuali soluzioni di problema iniziale dato si trovano tra quelle dell'ultimo problema dedotto.

L'operazione di sintesi consiste poi nel percorrere il cammino inverso del precedente, ritornando su ogni anello della catena di deduzioni, assumendo come dati i risultati dei vari problemi della catena, fino a giungere al problema iniziale.

I metodi della geometria analitica non apportano alcuna modifica alla sostanza di questa procedura; essi si limitano a precisare gli strumenti con i quali i vari passi deduttivi sono compiuti; strumenti che sono forniti dall'Algebra o dall'Analisi matematica.

Questi strumenti permettono di conferire alla dottrina chiamata "Geometria analitica" un certo aspetto di metodo per la soluzione dei problemi geometrici, secondo lo spirito di Cartesio, di cui abbiamo già detto.

Resta tuttavia valido per la geometria ciò che, secondo una leggenda, Euclide rispose ad un potente del suo tempo: «Non esiste via regia ».

Oggi potremmo tradurre dicendo che non esistono procedimenti facili per imparare le geometria e per risolvere i suoi problemi. E ciò fa della geometria uno strumento utilissimo per stimolare l'apprendimento attivo ed autonomo, e per la formazione mentale degli alunni.

3 - I valori formativi ed educativi della geometria: la geometria come attività.

Abbiamo detto dei metodi generali della geometria; ritorneremo su questi argomenti,in seguito, facendo qualche cenno di didattica di questa dottrina.

Qui vogliamo soffermarci a considerare il fatto che la matematica razionale che noi conosciamo ha avuto inizio, in modo meraviglioso, con la civiltà greca, e con contenuti prevalentemente di geometria.

Questa nostra affermazione non intende negare ogni attività matematica delle civiltà precedenti quella greca, o di quelle che non hanno avuto contatti con essa; si vuole soltanto osservare che la civiltà greca ha generato una dottrina geometrica astratta e razionale, creando un modello di esposizione che è stato adottato per secoli. Inoltre, come abbiamo già detto, i Greci non si sono limitati a creare un corpo imponente di dottrina, ma hanno anche indagato sui principi e sui metodi, che reggono ed ispirano le certezze della geometria.

Pare lecito pensare che questa evoluzione della storia del pensiero umano possa ispirare, almeno da lontano, la didattica della matematica.

Infatti non si pretende che la didattica segua pedissequamente tutti i singoli episodi dello sviluppo storico della scienza; ma questo sviluppo può (e si potrebbe dire deve) prendere dalla testimonianza storica le indicazioni sulle strategie didattiche più efficaci per poter stimolare l'appropriazione attiva ed autonoma dei concetti e delle strutture da parte dei discenti.

In questo ordine di idee cercheremo di far vedere come la geometria possa costituire un elemento molto prezioso per la formazione dei discenti a quella razionalità che è un costituente di assoluta importanza per i giovani. Noi pensiamo infatti che la geometria costituisca un primo momento nella attività del del soggetto umano nel costruirsi una visione razionale e coerente del mondo dell'esperienza; attività che coinvolge ovviamente le sensazioni elementari, provenienti da varie aree sensoriali; sensazioni che vengono elaborate dalla fantasia e vengono poi strutturate in una teoria (più o meno completa, soprattutto nei primi anni dell'età dello sviluppo razionale dei soggetti), la quale costituisce a sua volta il fondamento per una ulteriore visione razionale scientifica.

Sappiamo bene che recenti teorie sui fondamenti della matematica hanno proclamato solennemente la morte della geometria come parte della scienza matematica, e ne hanno presuntuosamente stilato anche l'atto di morte.

Ma è anche nostra convinzione che l'aver espulso le facoltà di intuizione spaziale dai "curricula" della formazione intellettuale degli adolescenti sia stato un errore storico, come autorevolmente si è espresso Hans Freundenthal.

A questo punto pensiamo che sia opportuno ricordare ciò che ha scritto autorevolmente Galileo in una celebre pagina del "Saggiatore", laddove il grande pisano afferma che il grande libro dell'universo che continuamente ci sta aperto davanti agli occhi è scritto in lingua matematica, e che ..«i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche...».

E pare a me che questa posizione di Galileo bene renda giustizia al fatto che il primo momento della matematizzazione delle nostra esperienza passa attraverso la schematizzazione geometrica.

D'altra parte è anche noto che le sensazioni elementari che danno luogo alla elaborazione fantastica, la quale fonda la geometria, afferiscono a diverse aree sensoriali. Vi sono le sensazioni di tipo visivo, le quali riguardano la forma dei corpi o le sensazioni derivanti da fenomeni di trasporto di energia (raggi di luce sottili in stanze buie e polverose), che danno luogo alla costruzione delle immagini delle forme geometriche elementari (segmenti di retta, parti di piano); vi sono le sensazioni che danno luogo alla intuizione delle relazioni di similitudine, le quali fondano il riconoscimento delle forme; vi sono le sensazioni di tipo tattilo-muscolare che danno luogo, per esempio, alla immagine di corpo rigido e di trasporto rigido; immagine che è fondamentale per tutta la geometria euclidea, perché fonda la relazione di uguaglianza.

In altri termini si potrebbe dire che la costruzione della geometria si avvale di quello che Hans Freundenthal (* II) qualifica come "contesto ricco" per la matematizzazione; e che quindi venga così realizzata la qualifica della geometria come "primo capitolo della fisica", cioè della conoscenza razionale matematizzata del mondo che ci circonda.

Quando si vedano le cose in questa luce, anche la prima iniziazione alla geometria, che si svolge nelle scuole dell'ordine elementare, può essere indirizzata alla formazione della mentalità razionale e scientifica dei soggetti.

Infatti fin dalle scuole elementari si insegnano i concetti che precisano la situazione del soggetto rispetto all'ambiente che lo circond ed al campo di forze che lo pervade. Invero tra gli elementi di utilizzo del linguaggio concettuale vi sono anche i termini come "davanti", "dietro", "destra", "sinistra" , "sopra", "sotto" che forniscono al soggetto un insieme di capacità espressive atte a conoscere ed esprimere la propria situazione nell'ambiente ed a comunicare questi concetti agli altri.

L'acquisizione di termini riguardanti la forma degli oggetti fa anche parte di questa descrizione dell'ambiente e della situazione del soggetto in relazione ad esso.

Noi pensiamo che questo dominio della terminologia riguardante la situazione locale del soggetto debba sfociare in una maturazione ulteriore che conduce ad una visione più propriamente razionale. Infatti questa descrizione dell'ambiente non è sbagliata, nè illegittima, ma è soltanto limitata dal fatto che essa è strettamente soggettiva. In questo consiste l'errore che spesso si incontra in certa manualistica, la quale presenta certi termini, validi per la descrizione soggettiva dell'ambiente, come se avessero significato indipendente dall'osservatore. Di tal genere sono per esempio i termini come "base" oppure "altezza" di un rettangolo ; termini che si vedono scritti in vari manuali e che sono impiegati correntemente senza precisare che hanno senso soltanto rispetto ad un osservatore, e che quindi hanno un valore strettamente relativo. Analoghe osservazioni potrebbero essere fatte rispetto ai termini "sopra" e "sotto" che fanno riferimento a quel complesso di sensazioni che noi proviamo fino dalla vita prenatale, e che sono dovute al campo gravitazionale nel quale siamo immersi.

Pensiamo che uno dei compiti della scuola sia quello di stimolare i discenti a passare da questa descrizione soggettiva del mondo a una descrizione intersoggettiva, che si ottiene cercando si porsi nella situazione di un altro osservatore, oppure di immaginare di cambiare la propria situazione nei riguardi di un oggetto osservato. Ciò dovrebbe condurre ad una descrizione della realtà osservata che sia intersoggettiva e quindi si avvii ad essere oggettiva; nel senso che ogni oggetto possa essere riconosciuto e conosciuto da ogni osservatore, perché è stato descritto per mezzo delle sua caratteristiche essenziali.

E' appena necessario osservare e ricordare che in questo ordine di idee le proprietà formative della geometria si collegano con le problematiche relative alla espressione linguistica. Infatti siamo convinti profondamente che la formazione mentale dei soggetti debba contemplare, con stretto sinergismo, la costruzione di concetti e quella di capacità espressive.

Capacità che dovrebbero esplicarsi tanto nell'ambito della lingua materna (ed anche di una lingua straniera) che nell'ambito della matematica, nella misura in cui questa dottrina si esplica con gli aspetti di un linguaggio convenzionale e scientifico.

In questo ordine di idee siamo lieti di poter annunciare la nostra identità di vedute con la ricercatrice Stella Baruk, che ha messo in evidenza, in una serie di lavori, lo stretto collegamento tra la formazione matematica e quella linguistica, ed ha pure messo in evidenza le lacune di un insegnamento della matematica troppo formalistico.

Dopo il passaggio dalla descrizione soggettiva a quella intersoggettiva degli oggetti, potrebbe iniziare l'avviamento dei discenti al lavoro deduttivo, più strettamente razionale. Pensiamo infatti che la geometria sia un esempio profondamente formativo, e quindi paradigmatico, della impostazione scientifica della conoscenza della natura; infatti questa conoscenza ci conduce ad impiegare sistematicamente la deduzione, che fa passare in modo rigoroso e certo dalle ipotesi formulate alle conseguenze.

Nel caso della geometria la deduzione permette di conoscere pienamente gli oggetti di conoscenza, a partire dagli assiomi enunciati e dalle definizioni formulate. E' questa la procedura che, nella impostazione classica, si seguiva fino dai primi passi, dopo di aver presentato i cosiddetti "criteri di uguaglianza" dei triangoli; e la impostazione stessa, con la utilizzazione dei criteri, cioè delle condizioni sufficienti perché siano valide certe proposizioni, indica il posto preminente che la deduzione, cioè l'esercizio della logica, prende in questo ambito.

Analoghe considerazioni possono essere svolte a proposito dei concetti legati alle proprietà di simmetria. Ritorneremo in seguito su questo argomento che ci sembra particolarmente interessante per il taglio che vogliamo dare a questo nostro lavoro; qui ci limitiamo ad osservare che le proprietà di simmetria di un oggetto possono fondare e giustificare le previsioni che noi possiamo fare a proposito delle operazioni che vogliamo eseguire, e delle manipolazioni alle quali intendiamo sottoporre l'oggetto stesso. Ed ancora una volta la deduzione mostra, in questo ambito, la potenza e le possibilità di dominio che la scienza ci conferisce sul mondo che ci circonda.

4 - La geometria come formazione alla creatività ed alla progettualità.

Abbiamo detto dei valori formativi della geometria come attività, e dello spirito geometrico come un porsi razionale attivo di fronte agli oggetti, che vengono descritti con precisione, definiti con la precisazione della loro essenza geometrica, e conosciuti per deduzione in tutte le loro proprietà necessariamente conseguenti dalla definizione.

La breve descrizione che abbiamo fatto delle procedure di analisi e di sintesi, codificate già dai greci come passi fondamentali per la soluzione dei problemi, offrono l'occasione per riflettere su un altro aspetto della formazione conferita dalla geometria: infatti quando abbiamo parlato della procedura di analisi per la soluzione di un problema, abbiamo ricordato che in questa occorre "immaginare il problema risolto", per dedurre poi le conseguenze e giungere alle condizioni necessarie che debbono essere soddisfatte.

E' appena necessario rilevare il posto che l'immaginazione tiene in questa procedura, e l'opportunità di esercitare la nostra mente e quella dei discenti in operazioni come queste.

Come abbiamo già detto, parlando della capacità di immaginarsi nella posizione di altri osservatori per giungere ad una descrizione intersoggettiva degli oggetti, anche nel momento di iniziare la soluzione di un problema per via di analisi, occorre saper immaginare in molti modi le circostanze del problema risolto, in modo da poter conferire alla soluzione il massimo possibile della generalità. Si tratta, ancora una volta, di un allenamento alla creatività, che è una qualità utilissima, per non dire addirittura necessaria, ad ogni autonomia di pensiero e di comportamento; qualità quindi che dovrebbe essere uno dei fini della formazione scolastica dei nostri giovani. Ed è triste osservare che spesso la nostra scuola rinuncia alla formazione di questa qualità per ripiegare sull'addestramento dei discenti alla ripetizione fedele di schemi e di procedure già stabilite, ed alla ubbidienza impeccabile alle regole impartite e spesso memorizzate acriticamente.

In questo ordine di idee qualcuno ha osservato che, decenni fa, le intenzioni di Giovanni Gentile, a quell'epoca riformatore della scuola italiana, nel progettare una scuola da chiamarsi "Liceo scientifico", (parallela al Liceo classico, unico allora esistente) erano propria quelle di conferire una formazione scientifica ai giovani, piuttosto che una massa di regole e di conoscenze poco organicamente collegate tra loro. Ma, almeno per quanto riguarda l'insegnamento della matematica, non si direbbe che questo progetto di una scuola che mettesse in risalto l'aspetto profondamente umanistico della scienza sia stato realizzato. Infatti già a quell'epoca i temi scritti di maturità erano ricalcati su un modello quasi obbligatorio ed uniforme; il che portò alla epidemia dell'insegnamento dei metodi di discussione dei problemi di secondo grado (ricordiamo il famigerato "metodo di Tartinville") ed all'epidemia di quella malattia mentale che i francesi (purtroppo anche loro alle prese con problemi didattici analoghi) chiamarono "trinomite" (o sindrome del trinomio di secondo grado).

Aggiungiamo anche che la soluzione dei problemi geometrici, oltre al necessario esercizio di immaginazione, richiede spesso anche la progettazione di una procedura di costruzioni geometriche logicamente collegate tra loro, e strutturate secondo una gerarchia logica che ne fa un sistema coerente ed efficace di operazioni concrete. E' appena necessario osservare che anche questa formazione alla progettazione di una catena di operazioni (sarebbe forse meglio dire "una cascata") allena i discenti ad un comportamento razionale, autonomo e motivato in ciascun momento della esecuzione di una certa impresa.

Ritorneremo in seguito sul problema psicologico della motivazione come molla facilitante (e spesso addirittura necessaria) per l'apprendimento; la validità di questa circostanza è confermata da casi interessanti di soggetti che presentano un rifiuto abbastanza netto delle procedure algebriche simboliche, ed accettano invece certe procedure geometriche, forse perché esse fanno appello ad una intuizione che la fredda coerenza formale dei calcoli non riesce a mettere in moto.

5 - Momenti della evoluzione della geometria nel secolo XIX; la geometria proiettiva.

Nel N. 2 abbiamo detto, in forma lievemente paradossale, che il metodo della geometria è stato codificato da secoli, e consiste nei due momenti, di analisi e sintesi, di cui parlano Euclide e Pappo. Ciò tuttavia non significa che la geometria non debba tener conto della evoluzione della scienza, e della matematica in particolare, che è avvenuta nei secoli. Abbiamo già osservato che le convenzioni di rappresentazione, che traggono la loro origine dall'opera di Cartesio, permettono di eseguire l'analisi con gli strumenti ed i simboli escogitati dall'algebra. In tal modo il momento deduttivo acquista uniformità nello svolgimento delle deduzioni (ridotte a calcoli algebrici) e anche certezza nei risultati. Inoltre la deduzione, ricondotta ad essere una applicazione di regole formali ben codificate, acquista astrattezza e generalità. Per queste e per altre ragioni i metodi della geometria analitica costituiscono uno strumento validissimo e potente del quale la matematica (e non solo la geometria) oggi non potrebbe fare a meno.

Nel seguito ritorneremo a riflettere sui risvolti didattici di questa situazione; ora osserviamo che l'invenzione dei metodi cartesiani non è il solo progresso che la geometria abbia vissuto nella sua storia. Ci pare qui interessante fissare la nostra attenzione sulla evoluzione della geometria nel secolo XIX, evoluzione che ha mutato profondamente l'assetto della dottrina ed ha esteso la sua influenza anche sul resto della matematica.

Questa evoluzione, a nostro parere, può avere anche dei riflessi sulla didattica, nella misura in cui non la si voglia mantenere ancorata ai metodi tradizionali, senza alcuna apertura sul progresso di metodi e di contenuti che si è verificato nei secoli.

Non è ovviamente possibile passare in rassegna tutti gli episodi di grande importanza che segnano l'evoluzione della geometria nel secolo scorso. Dobbiamo quindi fare una scelta, fissando la nostra attenzione su quelli che ci sembrano più importanti per le conseguenze che possono avere per la didattica. Conseguenze che potrebbero giungere fino alla impostazione della struttura dei corsi in modo relativamente nuovo ma che comunque possono anche influenzare la mentalità con la quale i corsi vengono effettuati, anche se questi esteriormente mantengono sempre lo stesso aspetto formale.

Non intendiamo interrompere le nostre argomentazioni con la presentazione di problemi particolari, e con lo svolgimento dei relativi ragionamenti e calcoli. Ciò verrà fatto nella seconda parte di questo scritto, quando cercheremo di presentare alcuni esempi che ci sembrano significativi e paradigmatici per illustrare le argomentazioni che qui svolgiamo.

Un primo episodio sul quale vorremmo attirare l'attenzione è la invenzione della geometria proiettiva. Si potrebbe dire che questa nuova dottrina abbia contribuito ad estendere l'orizzonte degli studi geometrici in varie direzioni: infatti, con la introduzione degli elementi impropri, gli assiomi di appartenenza acquistano una grande semplicità, il che contribuisce ad impostare una fondamentale visione unificatrice dei fatti geometrici, i quali vengono inquadrati nell'ambito di un gruppo di trasformazioni che amplia in modo naturale il gruppo della geometria elementare. Inoltre la visione proiettiva permette di enunciare la legge di dualità, e quindi di giungere ad una ulteriore estensione dei concetti di cui si occupa la geometria. Giunge così naturale la impostazione del concetto di corrispondenza, concetto che, in questa luce, diventa così una delle colonne portanti della trattazione. Questa raggiunge perciò la qualità di grande eleganza e di grande generalità, e permette la soluzione unificata di molti problemi di geometria elementare che a prima vista si presentano come diversi tra loro. Pare chiaro che la conoscenza della geometria proiettiva debba essere uno dei più importanti elementi della formazione degli insegnanti di matematica, o almeno di quelli della scuola media. E' purtroppo deprecabile che nella tradizione della Università italiana non entri più oggi alcun corso in cui si espongano almeno gli elementi fondamentali della geometria proiettiva, il cui insegnamento è ormai sostituito quasi ovunque da quello dell'algebra lineare; anche senza pretendere che la materia entri nei programmi delle scuole medie superiori [i nostri giovani devono già imbottirsi di tante nozioni che l'insegnante è preso da un giustificato timore di diventare un "insaccatore"], sarebbe utile che l'insegnante potesse guardare alla materia che insegna da un livello superiore, che gli permetta una sintesi vitale delle proprie conoscenze ed una azione didattica capace di guidare i discenti alla appropriazione attiva delle nozioni. Risultato questo che ci pare una meta essenziale per una scuola che non voglia essere puramente canale di trasmissione di nozioni slegate e palestra di esercizio puramente addestrativo.

Inoltre la geometria proiettiva offre numerorissimi esempi di contenuti eleganti ed utili, che sembrano particolarmente adatti per giustificare e vivificare la geometria delle trasformazioni, che è nominata nei programmi d'insegnamento di tutte le scuole di ogni grado.

6 - La ricerca di nuovi simbolismi e la geometria delle trasformazioni.

Un secondo episodio nella evoluzione degli studi geometrici del secolo scorso, che ci pare abbia un significato valido anche per la didattica, ci sembra essere la ricerca, da parte di numerosi matematici, di strumenti simbolici e quindi (in senso molto lato) linguistici per la rappresentazione degli oggetti geometrici.

Ci sembra questo un sintomo abbastanza importante del fatto che in matematica (come in ogni altro ambito di pensiero, ma diremmo soprattutto in matematica) spesso il progresso ed il successo certi concetti e di certe teorie o modi di pensare sia strettamente collegato con l'adozione di un simbolismo efficace e potente per esprimere il pensiero. Di modo che i due momenti, quello della creazione di nuovi concetti e quello della loro espressione linguistica, per quanto distinti in teoria, sono molto collegati tra loro nella pratica.

Uno degli esempi più importanti, che sta sotto gli occhi di tutti noi, è fornito dalla imponente e radicale influenza esercitata sul pensiero scientifico dell'Occidente dalla introduzione delle convenzioni arabo-indiane per la rappresentazione dei numeri naturali. Sappiamo infatti che per millenni l'umanità ha avuto delle conoscenze di aritmetica, e che molti popoli (mesopotamici, cinesi, maya, greci, romani ecc.) hanno escogitato delle convenzioni per rappresentare i numeri naturali. Ma le convenzioni oggi utilizzate da tutti noi hanno spazzato dalla scena dell'uso dell'uso pratico, della tecnica e della scienza tutte queste convenzioni: pensiamo che ciò sia dovuto non soltanto al fatto che queste convenzioni permettono di rappresentare comodamente dei numeri comunque grandi, ma anche (e forse soprattutto) al fatto che queste convenzioni permettono la costruzione di algoritmi rapidi, semplici e sicuri per la esecuzione delle operazioni sui numeri. Tanto che queste convenzioni di rappresentazione e gli algoritmi che le utilizzano sono insegnate in tutto il mondo civile nelle scuole dell'ordine elementare.

Ci si potrebbe domandare se qualche cosa di analogo possa essere avvenuto, oppure possa avvenire anche per la geometria. Abbiamo accennato al N. 2 come Cartesio fosse ben conscio del valore metodologico delle idee da lui presentate.

E' facile tuttavia osservare che l'impiego dei metodi della geometria analitica, così come oggi sono abitualmente presentati ed insegnati, richiede che in ogni questione sia scelto e fissato un sistema di riferimento; e questo, in linea di principio, può essere del tutto estraneo alla questione che si tratta. Pertanto l'impiego dei mezzi della geometria analitica richiede la presenza di elementi geometrici convenzionali, e quindi delle operazioni di codificazione e di decodificazione che spesso velano ed addirittura quasi nascondono il significato geometrico dei simboli usati. Inoltre le deduzioni (cioè i calcoli sui numeri che rappresentano gli enti geometrici) vengono svolte secondo le leggi dell'algebra dei numeri (reali o complessi) cioè delle coordinate che rappresentano gli enti della geometria; e si può osservare che la sintassi (cioè l'insieme delle regole di deduzione) appare in questo caso mutuata da quella valida nel campo dei numeri.

Appare quindi storicamente comprensibile che, in un periodo di fervore creativo per la geometria, l'attenzione dei ricercatori sia stata attirata dal problema di trovare dei metodi e delle convenzioni che fornissero un simbolismo dotato, per così dire, di una presa diretta sugli oggetti della geometria; in modo da evitare il lungo giro che si concreta nella scelta di un riferimento, nella traduzione con coordinate degli oggetti geometrici, nella applicazione delle leggi dell'algebra ed infine nella reinterpretazione dei risultati, ottenuti con il calcolo, inteso come strumento di deduzione (analisi, secondo la nomenclatura classica).

Pertanto il secolo scorso ha visto una fioritura di sistemi simbolici, inventati da vari ricercatori, in vari ambiti, e sotto lo stimolo di varie necessità.

Occorre anche ricordare il grande contributo fornito in questo campo dai cultori di dottrine fisiche; si direbbe che per questi l'invenzione di nuovi metodi e la opportunità di svincolarsi dalle vecchie convenzioni cartesiane sia stato uno stimolo potente. Ed effettivamente la meccanica razionale ed in generale la fisica ancora oggi adottano dei metodi vettoriali, che appaiono chiaramente molto più adatti del metodo classico delle coordinate per rappresentare gli enti della fisica.

Tra gli episodi che sembrano più significativi di questa evoluzione citiamo l'invenzione del "Calcolo delle equipollenze" di Bellavitis, le coordinate di retta e di piano di Julius Plücker [1801-1868], il calcolo dei quaternioni di William Rowan Hamilton [1805-1865], la teoria della Ausdehnungslehre di Hermann Grassmann [1809-1877] ed il calcolo geometrico di Giuseppe Peano [1858-1932].

Si potrebbe dire che questi sistemi di simboli sono ispirati dal desiderio di non limitarsi a rappresentare gli enti della geometria (per esempio i punti con lettere dell'alfabeto, come si faceva da secoli), ma anche di inventare delle regole di sintassi di questi simboli, di modo che la dimostrazione dei teoremi e la risoluzione dei problemi si riducessero ad applicazione delle regole di sintassi; ciò avviene già con la simbologia che noi già utilizziamo per i numeri naturali; infatti noi insegniamo, fin dalla scuola elementare, non soltanto a rappresentare i numeri ma anche ad eseguire le operazioni su di essi, mediante l'applicazione di opportuni algoritmi. Tuttavia si potrebbe dire che questi sistemi di simbolismo non abbiano riscosso vasto successo e quindi non abbiano avuto molta diffusione; forse ciò potrebbe essere dovuto al fatto che la realtà geometrica che si deve rappresentare è molto articolata e complessa, il che rende i sistemi di regole da insegnare molto complessi. A conferma di questa congettura osserviamo per esempio che Peano costruì l'assiomatica dei numeri naturali su 5 assiomi, mentre l'assiomatica che David Hilbert [1862-1943] costruì per la geometria euclidea richiede 5 gruppi di assiomi, ed ogni gruppo comporta diversi assiomi

Si potrebbe dire che oggi sono abitualmente impiegati, nella meccanica e nella fisica e spesso anche nella geometria elementare e nella didattica, dei sistemi di simboli diretti a rappresentare i vettori. Purtroppo le notazioni adottate dalle varie scuole non sono uniformi, e spesso quindi l'adozione di questi simbolismi presenta una certa difficoltà.

Un terzo episodio importante per la teoria e per la didattica della evoluzione geometrica del secolo scorso è costituito dalla celebre dissertazione che Felix Klein [1849-1925] pronunciò nel 1872 all'inizio dei propri corsi presso l'Università di Erlangen; dissertazione che viene abitualmente richiamata con l'espressione

"Programma di Erlangen" ed è stata tradotto in italiano da G. Fano colo titolo "Considerazioni comparatie sopra ricerche geometriche recenti" [il titolo originale, in lingua tedesca è "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen"].

E' probabilmente la linea di pensiero del geometra tedesco quella che ha ispirato l'introduzione delle diciture riguardanti la "Geometria delle trasformazioni" che figurano nei programmi delle scuole.

Si potrebbe dire che l'idea fondamentale del pensiero della geometria delle trasformazioni è quella della corrispondenza biunivoca che viene chiamata "trasformazione" delle figure. Supponendo che le operazioni che si eseguono costituiscano un gruppo (con le proprietà ben note della struttura algebrica di gruppo), si dimostra che tra le figure che si ottengono l'una dall'altra con una trasformazione dei gruppo sussiste una relazione che può essere chiamata, secondo l'uso, "relazione di equivalenza", perché possiede le proprietà formali (riflessiva, simmetrica e transitiva) che caratterizzano tali relazioni.

Cercando di esprimere le stesse cose in altri termini, si potrebbe dire che un gruppo di trasformazioni realizza in forma concreta ed esplicita l'operazione di astrazione, codificando in modo formale, mediante la struttura algebrica di gruppo, quella operazioni mentale che consiste nella ricerca delle proprietà comuni a tutti gli elementi di una certa classe.

Infatti, nello spirito della geometria delle trasformazioni, l'oggetto fondamentale della geometria è l'insieme delle proprietà delle figure che sono invarianti per il gruppo di trasformazioni: in altri termini, le proprietà delle figure che sono oggetto della geometria sono quelle comuni ad una figura ed a tutte quelle che si ottengono da essa operando su di essa con una trasformazione del gruppo.

Si potrebbe dire che la geometria è determinata dal gruppo di trasformazioni che si conviene di applicare alle figure. Quindi, in questo spirito, la geometria tradizionale (elementare) viene caratterizzata dalle trasformazioni del gruppo delle similitudini; quelle della geometria proiettiva sono caratterizzate dal gruppo delle omografie, del quale il precedente è un sottogruppo; viene così ad avere senso preciso l'affermazione che abbiamo fatto nel paragrafo precedente, dicendo che la geometria proiettiva costituisce un fecondo ampliamento della geometria elementare classica. In altre parole, questa impostazione rende evidente il fatto che possono esistere diverse "geometrie", ognuna delle quali è legittimata a rappresentare in modo astratto e coerente certi aspetti della realtà materiale, dalla quale i nostri sensi prendono i contenuti iniziali della geometria. La scelta del gruppo di trasformazioni, che conveniamo di poter applicare agli oggetti della geometria che stiamo costruendo, costituisce questa dottrina, e guida le ulteriori procedure per la costruzione di una teoria coerente delle nostre esperienze spaziali.

Va osservato che i principi fondamentali di questa impostazione formano da sempre il patrimonio delle nostre conoscenze geometriche. Si potrebbe dire che quando una maestra dice allo scolaro « Disegna più grosso il quadrato» utilizza i concetti fondamentali della geometria delle trasformazioni; infatti ella tiene conto del fatto che le proprietà importanti della figura geometrica che si sta studiando non dipendono dalle grandezza delle figura quadrata che lo scolaro sta disegnando. E del resto anche l'abitudine invalsa di fare dei disegni per rappresentare le figure geometriche costituisce una utilizzazione implicita ed intuitiva dei concetti fondamentali della geometria delle trasformazioni.

D'altra parte, comed abbbiamo già detto, la percezione dei rapporti di similitudine fa parte delle esperienze elementari sulle quali viene costruita la geometria; tale è per esempio la esperienza che ci fa riconoscere la fisionomia di una persona dalla fotografia oppure ci fa ragionare su una figura in scala. Analoghe considerazioni si potrebbero fare a proposito della costruzione di classi di equivalenza di oggetti, classi costruite sulla base di un gruppo di movimenti. Così per esempio noi non abbiamo alcuna difficoltà nell'immaginare il trasporto rigido di un segmento, costruendo così la classe d'equivalenza alla quale corrisponde il concetto di "lunghezza", e così via; gli esempi si potrebbero moltiplicare, tanto immediate e numerose sono le esperienze quotidiane sulle quali viene costruita la geometria euclidea abituale.

Pertanto si potrebbe dire che la impostazione data da Klein alla trattazione della geometria ha contribuito a far prendere esplicita coscienza delle operazioni che stanno alla base della costruzione di questa dottrina, collegandola in modo rigoroso al una struttura algebrica ben determinata che è quella di gruppo, In questo ordine di idee la trattazione di Klein ha ampliato di molto la metodologia della geometria, introducendo in questa delle strutture diverse da quelle tradizionali; in questo si potrebbe anche ricordare che per esempio già Leonardo Eulero [1707-1783] aveva esplicitamente messo in evidenza la non commutatività di certe operazioni geometriche che traducevano i movimenti dei corpi rigidi.

E' appena necessario ricordare che il concetto di trasformazione, ed il corrispondente concetto di invariante, possono essere metodicamente utilizzati per la risoluzione di problemi geometrici; e con questa utilizzazione si può conseguire spesso una notevole eleganza e generalità di risultati, pur rispettando sempre la massima di cui è stato detto al N.2, cioè la non esistenza di una "via regia" che serva in ogni caso per uscire da ogni situazione problematica.

7 - La simmetria.

Il concetto di trasformazione geometrica e di gruppo di trasformazioni può essere utilmente collegato con il concetto di simmetria, che, a sua volta, ha tanti collegamenti con la vita comune e addirittura con l'arte.

Prendendo lo spunto proprio dall'impiego quotidiano dei termini che riguardano la simmetria, si potrebbe tentare il collegamento di questo concetto con la geometria delle trasformazioni osservando che, nel modo comune di pensare, abitualmente un oggetto viene giudicato "più simmetrico" di un altro se è mutato in sè da un gruppo di trasformazioni più ampio di quello che porta in sè il primo. Per uscire dal generico, possiamo pensare ad un triangolo abituale euclideo, e quindi considerato rispetto al gruppo dei movimenti rigidi. In questo ordine di idee, pare ovvio che il triangolo generico (chiamato "scaleno" da qualche manualista) può essere giudicato meno simmetrico dell'isoscele, e questo, a sua volta, meno simmetrico dell'equilatero. Invero l'isoscele è mutato in sè da un gruppo di due operazioni (una simmetria involutoria e l'identità) mentre nel caso dell'equilatero esiste un gruppo di 6 movimenti rigidi che lo portano in se stesso; il triangolo generico poi non può essere mutato in sè da alcun movimento rigido.

E' facile costruire altri esempi, ed estendere queste considerazioni del piano allo spazio. In particolare si potrebbe dire che i poliedri regolari offrono degli esempi molto eleganti che possono servire a confermare questo nostre considerazioni.

Esiste per esempio il caso del tetraedro che viene chiamato "isoscele" o anche "equifacciale"; le quattro facce di questo solido non sono triangoli equilateri, ma sono dei triangoli (scaleni) tutti uguali tra loro. Questo solido ammette un gruppo di movimento rigidi che lo portano in sè, che è un sottogruppo del gruppo dei movimenti del tetraedro regolare; precisamente esso è isomorfo al gruppo detto "trirettangolo", che porta in sè un parallelepipedo rettangolo (come per esempio un mattone).

Esprimendosi in modo pittoresco ed approssimato, si potrebbe dire che questo solido è certo "più simmetrico" del tetraedro generico, e "meno simmetrico" del tetraedro regolare.

Può essere interessante osservare che si applicano queste idee molto spesso anche nella tenica e nella pratica quotidiana: per esempio i congegni che stabiliscono collegamenti tra circuiti elettrici (le cosiddette "prese") sono costruiti in modo da evitare il più possibile l'esistenza di simmetrie: infatti quando esistano più conduttori da collegare con un unico pezzo, interessa molto spesso che il collegamento sia eseguito in un solo ed unico modo, stabilito dal costruttore degli apparecchi interessati.

Viceversa è noto che, per facilitare certe operazioni manuali di montaggio, sono state adottate delle viti la cui testa ha due tagli, incrociati tra loro, invece di un taglio solo, come nelle viti tradizionali; ed i corrispondenti cacciavite terminano pure a croce; ne consegue che l'attrezzo può ammettere un gruppo di rotazioni più ampio di quello del cacciavite tradizionale; resta così facilitata l'operazione del mettere in sito l'attrezzo per far ruotare la vite.

In un ordine di idee più vasto, si potrebbe pensare di collegare il concetto generico ed estetico di simmetria con le operazioni e le manipolazioni che noi eseguiamo sulle figure. E' noto inoltre che il fisico Pierre Curie [1859-1906] svolse delle considerazioni molto profonde a proposito della simmetria, tanto geometrica che materiale, nell'ambito dei fenomeni della fisica macroscopica. Egli enunciò anche dei principi molto generali a proposito della simmetria nella fisica; tali principi possono essere applicati anche alla geometria, e possono servire come criteri di ricerca delle strade per risolvere i problemi o per impostare i calcoli nello spirito della geometria analitica; ed anche come criteri di controllo della validità e della esattezza delle procedure adottate.

Un principio tra quelli enunciati da P. Curie, che potrebbe in particolare essere tenuto presente nella risoluzione di un problema geometrico, potrebbe essere presentato nel modo seguente:

« Tutte le simmetrie che esistono nei dati di un problema debbono esistere anche nei risultati ».

Si potrebbe dire che questo principio viene applicato spesso, e quasi inconsciamente, dai ricercatori esperti quando scelgono dei riferimenti opportuni per risolvere dei problemi geometrici con gli strumenti della geometria analitica. Infatti abbiamo osservato (N.6) che l'applicazione di queste procedure richiede la scelta di elementi di riferimento convenzionali e spesso estranei alla natura del problema. Ma proprio questa libertà di scelta permette talvolta di scegliere il riferimento in modo che il controllo delle simmetrie dei risultati sia particolarmente facile ed evidente; e si possa quindi utilizzare il principio sopra esposto come criterio di controllo, per verificare che le condizioni necessarie per la corretta soluzione del problema proposto siano state rispettate.

Possiamo osservare inoltre che il concetto di simmetria può essere esteso ed applicato anche in ambiti più vasti ed estesi di quelli della geometria euclidea classica.

In questo ordine di idee la geometria proiettiva offre molti esempi di figure che rispettano il criterio di simmetria, anche se le trasformazioni che le portano in sè non appartengono ai gruppi che caratterizzano la geometria euclidea.

Inoltre è possibile anche estendere il concetto di simmetria per giungere a quella che si potrebbe chiamare "simmetria verbale " o anche, se si vuole, "simmetria logica".

Per chiarire ciò che intendiamo esporre, si potrebbero prendere in considerazione quelle figure che la geometria proiettiva classica chiamava anche "configurazioni"; figure costituite da elementi geometrici, ognuno dei quali è collegato agli altri da relazioni che si esprimono con enunciati particolari, che potrebbero essere detti simmetrici in quanto non cambiano senso quando si operi sulle loro parole con particolari trasformazioni o scambi: si consideri, per esempio, la classica configurazione detta di "Pappo-Pascal"; essa è costituita, nel piano proiettivo, da 9 punti e 9 rette; e su ogni retta stanno 3 punti della configurazione e per ogni punto passano tre rette della configurazione.

Analoghe osservazioni possono essere fatte per la nota configurazione detta "di Desargues" o anche " dei triangoli omologici"; in questa configurazione piana si hanno 10 punti e 10 rette; per ogni punto passano tre rette della configurazione, e su ogni retta giacciono tre punti della stessa.

Pensiamo che si possa riconoscere in questi enunciati quella simmetria di enunciati che già aveva condotto Joseph Gergonne [1771-1859] ad enunciare la legge di dualità geometrica per gli enti della geometria proiettiva.

Pensiamo infine che questo modo di vedere la simmetria possa anche essere collegato con l'ambito dei calcoli algebrici.

E' facile osservare che certa manualistica e certa didattica sembra insistere in modo eccessivo sull'addestramento degli allievi ad eseguire dei

calcoli formali straordinariamente complessi e spesso privi di ogni scopo; ciò va contro le raccomandazioni delle premesse ai programmi di insegnamento, e rischia di dare una falsa immagine della conoscenza della matematica, riducendola ad una pura acrobazia funambolesca, fine a se stessa, eseguita con simboli strani e con regole che spesso appaiono misteriose ed arbitrarie.

Abbiamo invece presente il detto umoristicamente paradossale di un non dimenticato Maestro (Oscar Chisini),il quale ammoniva talvolta chi si gettava a capofitto nelle acrobazie di calcolo, credendo di dare così prova di abilità matematica; diceva Chisini allora che "...la matematica è la scienza che insegna a non fare i calcoli". Effettivamente in algebra si presenta il concetto di "funzione simmetrica", concetto che si fonda appunto sulla conoscenza dei termini di una espressione algebrica che scaturisce dalla ipotesi di simmetria della funzione, cioè della sua invarianza rispetto a certi gruppi di permutazioni dei suoi argomenti; il che permette di scrivere molti termini della espressione della funzione senza bisogno di calcolarli, così come l'ipotesi che una figura geometrica sia simmetrica (nei sensi che abbiamo presentato poco fa) permette di conoscere la sua natura in base a ben poche informazioni. E ciò presenta, ancora una volta un aspetto profondamente formativo dello studio intelligente delle matematica per le menti dei giovani.

PARTE SECONDA.

*Non c'è argomento, per quanto commplesso
che, studiato con pazienza ed intelligenza,
non diventi ancora più complesso.*

1 - Nel N. 5 della prima parte di questo scritto abbiamo affermato di non voler interrompere le argomentazioni ivi svolte con la presentazione di esempi e di problemi, presentazione che potrebbe distogliere l'attenzione del lettore e risultare fastidiosa e noiosa per qualcuno.

Dedichiamo questa seconda parte del nostro scritto allo svolgimento di alcuni esempi ed alle soluzioni di alcuni problemi. Ovviamente tali soluzioni non hanno alcun pregio di originalità e di novità; le richiamiamo qui soltanto per offrire degli esempi a supporto delle argomentazioni già svolte. Queste saranno richiamate in modo che il Lettore (posto che ne abbia voglia) potrà ritornare sugli argomenti già toccati e collegarli con gli esempi pratici qui presentati.

2 - Nel già citato N.5 della prima parte abbiamo accennato alla geometria proiettiva, ed all'ampliamento dei orizzonte che questa dottrina può provocare; di ciò avremo vari esempi. Quello che qui presentiamo si riferisce al fatto che in geometria proiettiva si costruiscono delle forme geometriche più generali di quelle considerate abitualmente in geometria elementare; in particolare si considerano delle forme geometriche i cui elementi generatori possono essere non soltanto punti, ma anche rette e piani. Per esempio, si considera il piano punteggiato, cioè il piano immaginato costituito come insieme di punti, nel quale le rette sono dei sottoinsiemi; ma si considera anche il piano rigato. cioè il piano immaginato come costituito come insieme di rette, nel quale i fasci di rette sono i sottoinsiemi.

Sappiamo che da questa visione si può partire per costruire la legge di dualità piana; e che questo modo di vedere le cose si può anche tradurre analiticamente, costruendo le coordinate di retta, chiamate spesso "coordinate plückeriane" dal nome del matematico e fisico tedesco Julius Plücker [1801-1868], al quale si deve la loro introduzione.

Questo modo di vedere le cose permette spesso di risolvere dei problemi geometrici con la facilità che nasce dal fatto di poter vedere le figure come insiemi di rette invece che come insiemi di punti soltanto.

Esempio - Sia una ellisse E nel piano euclideo; determinare il luogo delle rette secanti E, in modo tale che le coppie di punti di intersezione siano proiettati dal centro di E secondo coppie di rette perpendicolari tra loro.

Riferito il piano a coordinate cartesiane ortogonali x, y , sia

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 1 \tag{1}$$

l'equazione di E, considerata come luogo di punti.

Scritta l'equazione di una retta r nella forma:

$$ux + vy + 1 = 0, \tag{2}$$

è noto che i coefficienti u, v possono essere visti come coordinate della retta stessa, nel piano rigato sovrapposto al piano dato.

La retta r' simmetrica della r rispetto all'origine è data dall'equazione:

$$ux + vy - 1 = 0, \tag{3}$$

e la conica degenere nelle due rette parallele r ed r' ha ovviamente equazione:

$$(ux + vy)^2 - 1 = 0 . \tag{4}$$

Al fascio di coniche, determinato dalle (1) e (4) appartiene la conica la cui equazione si ottiene sottraendo membro a membro le due equazioni ora citate:

$$(a^2 - u^2)x^2 - 2uvxy + (b^2 - v^2)y^2 = 0. \tag{5}$$

La (5) rappresenta ovviamente una conica degenere in due rette passanti per l'origine degli assi; precisamente le due rette, rappresentate complessivamente dalla (5), passano per i 4 punti in cui le due rette r ed r', tra loro parallele, intersecano la ellisse E.

Esprimendo che la conica (5) è una iperbole equilatera si impone che le due rette suddette siano perpendicolari tra loro. Con pochi calcoli, applicando formule note, si ottiene quindi:

(6) $$u^2 + v^2 = a^2 + b^2;$$

si riconosce subito che la (6) rappresenta l'insieme delle rette tangenti ad una circonferenza, il cui raggio, elevato al quadrato, vale $1/(a^2 + b^2)$.

3.0 - Abbiamo osservato ripetutamente che uno dei momenti della evoluzione della geometria nel secolo XIX si realizza con la ricerca di simbolismi dotati di sintassi propria, che permetta la deduzione senza obbligare lo studioso a percorrere il ciclo ben noto, nei suoi classici momenti: scelta di un riferimento convenzionale, codificazione dei dati di un problema mediante il sistema di coordinate scelto, traduzione delle relazioni imposte dal problema con relazioni tra le coordinate, risoluzione del sistema di equazioni (o più in generale di relazioni) con le regole dell'algebra o dell'analisi matematica, decodificazione (o interpretazione) delle soluzioni del problema analitico in termini geometrici, discussione.

Il lettore avveduto avrà identificato in questa catena di operazioni i momenti di analisi e di sintesi che già si trovano messi in evidenza dalla geometria greca. E' chiaro tuttavia che questo percorso non è obbligatorio, e che si possono adottare altre convenzioni ed altre procedure, più agili.

In questa luce vorremmo riflettere su alcune convenzioni che si possono adottare per lo scopo che abbiamo in vista. Le più semplici convenzioni di questo tipo saranno analizzate in questo paragrafo; altre sono state inventate, delle quali ci occuperemo in seguito.

Le convenzioni di cui intendiamo parlare si fondano sulla possibilità di orientare la retta, cioè di stabilire su questa figura un ordinamento totale.

Consideriamo quindi una retta r e supponiamo che sia stato stabilito su di essa un orientamento; questo, come è noto, dà luogo a due versi sulla r, uno dei quali può essere convenzionalmente chiamato "positivo"; con che il verso opposto sarà, pure convenzionalmente, chiamato "negativo". Si supponga poi di aver fissato un segmento che serva da unità di misura dei segmenti; in questa ipotesi, considerati due punti A, B della retta, possiamo convenire di indicare con il simbolo " AB " il numero reale (relativo) il cui modulo esprime la lunghezza del segmento, misurata con l'unità di misura fissata, e il cui segno, positivo o negativo indica rispettivamente che percorrendo il segmento nel verso che va da A a B, si va in senso concorde, oppure rispettivamente discorde, con quello fissato preventivamente sulla retta r come positivo.

Queste convenzioni portano a scrivere le ovvie relazioni che qualche autore chiama "relazioni segmentarie fondamentali": essendo A, B , C tre punti qualisivogliano della retta r, si ha:

$$AB + BA = 0\,; \qquad (1)$$
$$AB + BC + CA = 0;$$

in particolare si ha poi immediatamente, in forza delle convenzioni:

$$AA = 0\,. \qquad (2)$$

Come abbiamo detto, perché le (1) abbiano senso occorre che sia stato stabilito un verso sulla retta r, e che sia stato scelto un segmento come unità di misura delle lunghezze; tuttavia si constata facilmente che la validità delle (1) non dipende dalla particolare scelta del verso chiamato positivo sulla r, nè dalla scelta del segmento unità.

Applicando le relazioni fondamentali si giunge facilmente alla nota relazione (detta "di Eulero"):

$$AB \bullet CD + AC \bullet DB + AD \bullet BC = 0. \qquad (3)$$

La dimostrazione della (3) si ottiene applicando le relazioni segmentarie fondamentali, e precisamente ponendo:

$$CD = CA + AD \;\; ; \;\; DB = DA + AB \;\; ; \;\; BC = BA + AC. \qquad (4)$$

Sostituendo queste espressioni nella (3), eseguendo i calcoli e sempre tenendo conto delle relazioni segmentarie si verifica la validità della formula (3).

3.1 - Con le convenzioni stabilite si possono costruire certi invarianti numerici delle terne di punti allineati che sono classici in quest'ordine di trattazioni. Precisamente, indicati con A, B, C tre punti distinti di una retta r, si indica col simbolo "(ABC)" il numero definito dalla:

$$(ABC) = AC/BC. \qquad (1)$$

Tale numero viene chiamata spesso "rapporto semplice" dei tre punti A, B, C sulla retta, ed è ovviamente indipendente dalla scelta del verso positivo sulla retta e del segmento unità di misura; esso invece dipende dall'ordine in cui i nomi dei tre punti sono indicati nel simbolo: infatti, posto:

$$(1) \qquad (ABC) = \alpha,$$

si hanno facilmente le seguenti valutazioni:

$$(2) \qquad (BAC) = 1/\alpha;\ (ACB) = 1-\alpha;\ (CAB) = 1/(1-\alpha);$$
$$(BCA) = 1-1/\alpha;\ (CBA) = \alpha/(\alpha-1).$$

Se fissiamo due punti A, B della retta r, è facile vedere che esiste una corrispondenzza biunivoca tra un punto X della retta r, diverso da B, ed il numero (reale relativo):

$$(3) \qquad (ABX) = x;$$

è noto che il numero x viene chiamato "coordinata baricentrica" del punto X; questa considerazione può servire al docente avveduto per approfondire il concetto di coordinate degli elementi geometrici: invero un sistema di coordinate può essere considerato come un insieme di convenzioni per stabilire una corrispondenza biunivoca tra elementi geometrici ed elementi analitici (numeri o insiemi di numeri), in modo tale che la struttura dei simboli adottati possa servire per descrivere gli oggetti geometrici e conoscere le loro proprietà.

Le coordinate baricentriche, per loro definizione, sono ovviamente invarianti per trasformazioni affini del piano (trasformazioni che portano rette in rette e parallelogrammi in parallelogrammi); in particolare per trasformazioni per similitudine; esse sono molto utili per la dimostrazione di certi teoremi che qui presenteremo a titolo di esempio: siano A, B, C tre punti distinti, non allineati. Indichiamo con i simboli:

$$\langle AB\rangle,\ \langle BC\rangle,\ \langle CA\rangle,$$

le tre rette determinate rispettivamente dalle coppie di vertici del triangolo che ha come vertici A, B, C. Siano dati sulle tre rette tre punti A', B', C', distinti dai vertici del triangolo; precisamente si abbia:

(4) $A' \in \langle BC \rangle \quad , \quad B' \in \langle CA \rangle \quad , \quad C' \in \langle AB \rangle$

Sussiste il seguente:

Teorema (detto "di Menelao", dal nome del geometra del I secolo d.C. che lo ha dimmostrato, ovviamente in modo diverso da quello in cui qui viene presentato) - Condizione necessaria e sufficiente perché i tre punti A', B', C' appartengano ad una medesima retta è che si abbia:

$$(5) \qquad (ABC')\bullet(BCA')\bullet(CAB') = 1.$$

Dimostriamo anzitutto che la condizione (5) è necessaria perché i tre punti nominati stiano su una medesima retta. Supponiamo dunque che esista una retta r, che interseca le tre rette sulle quali sono i tre vertici del triangolo nei tre punti in parola. Mandiamo per i tre vertici A, B, C, tre rette parallele tra loro, ad incontrare la r (supposta qui esistente) in tre punti che chiameremo rispettivamentre A", B", C". Con immediate considerazioni di similitudine di triangoli si giunge alle tre relazioni:

$$(6)\ (ABC') = AA''/BB''\ ;\ (BCA') = BB''/CC''\ ;\ (CAB') = CC''/AA'';$$

e da queste si ottiene immediatamente la (5).

Dimostriamo ora che la relazione (5) è sufficiente per garantire che i tre punti A', B', C' siano allineati; supponiamo quindi che la (5) sia vera, e supponiamo che non esista una retta che contiene i tre punti. Chiamiamo r' la retta che congiunge A' con B' e chiamiamo Z il punto in cui essa incontra la retta AB. Per il ragionamento sopra svolto si avrà, per costruzione:

$$(7) \qquad (ABZ)\bullet(BCA')\bullet(CAB') = 1.$$

Da questa relazione e dalla (5), che vale per ipotesi, si trae:

$$(8) \qquad (ABZ) = (ABC').$$

Ma, in base alle considerazioni svolte sopra, il numero (ABZ) può essere considerato come una coordinata del punto Z sulla retta $\langle AB \rangle 3$; pertanto dalla (8) consegue che Z coincide con C', il quale dunque appartiene alla retta r', congiungente A' con B'.

Dal teorema ora dimostrato trarremo alcune conseguenze, che ci forniranno ulteriori esempi di utilizzazione dei simboli convenzionali adottati.

Consideriamo ancora i tre punti A', B', C' per i quali valgano le ipotesi del teorema precedente. Sussiste il Teorema (detto "di Ceva"[Tommaso Ceva. 1649-1737]): Condizione necessaria e sufficiente perché le tre rette:

(9) <AA'> , <BB'> , <CC'>

abbiano in comune un medesimo punto è che si abbia:

$$(ABC')\bullet(BCA')\bullet(CAB') + 1 = 0. \tag{10}$$

Dimostriamo che la condizione (10) è necessaria: supponiamo quindi che esista un punto R, per il quale passano le tre rette (9). Consideriamo il triangolo di vertici B, C, B': i tre punti allineati A, A', R appartengono ai lati di questo triangolo, ed applicando il teorema precedente (di Menelao) a questo triangolo si ottiene la relazione:

$$(BCA')\bullet(CB'A)\bullet(B'BR) = 1 \tag{11}$$

Consideriamo ora il triangolo di vertici B, A, B', ed applichiamo anche a questo il teorema di Menelao, considerando i tre punti C, C',R che appartengono alle rette dei loro lati. Le relazione che traduce il teorema di Menelao si ottiene dalla (11) mettendo i simboli C e C' al posto dei simboli A ed A' e viceversa. Si ha quindi:

$$(BAC')\bullet(AB'C)\bullet(B'BR) = 1. \tag{12}$$

Da queste due relazioni, tenendo contoo della (1) e delle relazioni segmentarie fondamentali si ottiene la (10).

Dimostriamo ora che la relazione (10) è sufficiente per l'esistenza di un punto R comune alle tre rette (9); a tal fine, chiamiamo R il punto comune alle due rette <AA'> e <BB'>, e chiamiamo Z il punto di intersezione della retta <CR> con la retta <AB>. Per la dimostrazione ora data si avrà quindi:

$$(ABZ)\bullet(BCA')\bullet(CAB') = -1. \tag{13}$$

Da questa, e dalla (10), valida per ipotesi, si trae anche in questo caso la (8) e quindi la coincidenza di Z con C'.

Ovviamente il teorema di Ceva vale quando si abbia:

(14) (ABC') = (BCA') = (CAB') = -1,

ossia quando i punti A', B', C' sono i punti medi dei lati del triangolo ai quali rispettivamente appartengono; è noto che in questo caso il punto R viene chiamato "baricentro" del triangolo, e si ha anche:

(15) (AA'R) = (BB'R) = (CC'R) = -2.

Per questa via sono quindi state ritrovate le note proprietà fondamentali delle mediane e del baricentro di un triangolo.

Da ciò che è già stato detto si trae che queste proprietà sono invarianti per il gruppo delle affinità del piano.

3.2 - Ciò che è stato fatto nel piano può essere applicato facilmente nello spazio.

Consideriamo quattro punti distinti nello spazio, e chiamiamoli A, B, C, D, e supponiamo che essi non appartengano ad un medesimo piano; in questa ipotesi (che noi supporremo sempre valida nel seguito di questo paragrafo) è possibile prendere in considerazione una figura solida (poliedro), costituita da 4 facce triangolari, 6 spigoli, e 4 vertici. A questa figura solida, nota da millenni, viene dato il nome di "tetraedro", da un termine della lingua greca che indica appunto il fatto che essa possiede 4 facce.

Indicheremo con i simboli:

(16) <BCD>,< ACD>,< ABD>,< ABC>

i piani che contengono le facce, e che sono determinati appunto dai punti nominati.

Indichiamo poi con i simboli:

(17) R(a), R(b), R(c), R(d)

rispettivamente i baricentri dei triangoli che hanno come vertici le terne di punti che figurano nei simboli (16).

I segmenti che congiungono rispettivamente A con R(a), B con R(b), C con R(c) e D con R(d) verranno chiamati "mediane di prima specie " del tetraedro.

Indichiamo con i simboli:

(18) M(ab), M(ac), M(ad), M(bc), M(bd), M(cd),

i punti medi degli spigoli che hanno i loro estremi nelle coppie di punti che hanno nomi (maiuscoli) corrispondenti alle lettere minuscole indicate tra parentesi; i segmenti che uniscono:

(19) M(ab) con M(cd), M(ac) con M(bd) , M(ad) con M(bc)
verranno chiamati "mediane di seconda specie" del tetraedro.

Sussiste il
Teorema: le sette mediane (4 di prima specie e 3 di seconda specie) del tetraedro passano tutte per un medesimo punto S, che viene chiamato "baricentro del tetraedro". Questo è punto medio delle tre mediane di seconda specie; sussistono inoltre le relazioni:

(20) (ASR(a)) = (BSR(b)) = (CSR(c)) = (DSR(d)) = -3.

Diamo qui un cenno d'inizio della dimostrazione, considerando il triangolo che ha come vertici i punti B, C, D, e le sue tre mediane, cioè i segmenti che hanno come estremi rispettivamente C ed M(bbd, B ed M(cd), D ed M(bc); per il teorema dimostrato nel paragrafo precedente, tali mediane passano per il punto R(a). Quindi i tre piani, determinati dalle terne di punti:

(21) <ABM(cd)> ,< ACM(bd)>, < ADM(bc)>

passano tutti per la retta che contiene la mediana di prima specie, che congiunge A con R(a). Consideriamo in particolare il piano determinato dai tre punti: A, B, M(cd); in questo piano giacciono in particolare anche i punti M(ab) ed M(cd), e quindi anche la mediana di seconda specie che unisce tali due punti. Consideriamo ora il triangolo che ha come vertici B, M(ab), M(cd), e la trasversale che congiunge A ed R(a)[mediana di prima specie]. per ipotesi si ha:

(22) (ABM(ab)) = -1,

e , per il terema dimostrato nel paragrafo precedente:

(23) (BM(cd)R(a)) = -2.

Indichiamo con S il punto in cui la mediana di prima specie che congiunge A con R(a) incontra la mediana di seconda specie che congiunge M(ab) con M(cd). Applicando il teorema di Menelao al triangolo che ha come vertici B, M(cd), M(ab) e tenendo conto delle (22) e (23) si ottiene:

$$(M(ab)M(cd)S) = -1. \tag{24}$$

Ossia S è il punto medio della mediana di seconda specie che congiunge M(ab) con M(cd).

Consideriamo poi il triangolo che ha come vertici i punti A, B, R(a).

La mediana di seconda specie che congiunge M(ab) con M(cd) è una trasversale di questo triangolo, ed applicando il teorema di Menelao, e tenendo conto dei risultati finora conseguiti si ottiene:

$$(AR(a)S) = -3. \tag{25}$$

Lasciamo al volonteroso Lettore il compito di completare la dimostrazione, che non offre difficoltà concettuali.

4.0 - Nel paragrafo precedente abbiamo dato un esempio di simbolizzazione di enti geometrici con certe convenzioni che permettono una deduzione relativamente facile, fondata sulle regole sintattiche dei simboli adottati.

Può essere utile dare qualche esempio di altre convenzioni; e ciò per varie ragioni: anzitutto per ribadire il fatto che questi simbolismi sono convenzionali, e quindi che le difficoltà nel loro impiego non necessariamente sono da ascrivere a difetti nella razionalità dei soggetti, ma forse anche a particolari allergie o idiosincrasie verso certe simboli o certe convenzioni. In secondo luogo per confermare la possibilità di impiegare diversi simbolismi, senza dover passare attraverso i metodi della geometria analitica tradizionale,

Le notazioni a cui accenniamo sono una derivazione delle convenzioni che G. Peano [1858-1932], di cui abbiamo già parlato nel N.6 della prima parte, ha sviluppato in un volume intitolato "Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann".

Ivi Peano presenta in particolare certe figure geometriche che egli chiama "forme geometriche"; ancora più in particolare egli tratta delle forme di prima specie, per ognuna delle quali egli definisce un numero reale detto "peso". In questo modo egli ricostruisce il concetto di vettore come caso particolare di certe forme geometriche di prima specie di peso zero.

Non stiamo qui a riportare tutta la teoria costruita da Peano: infatti essa, per quanto molto ingegnosa ed efficace, non fu adottata dai matematici, che generalmente preferirono conservare l'impiego delle vecchie convenzioni cartesiane. Tuttavia ha avuto una certa fortuna ed una certa diffusione l'insieme di convenzioni per rappresentare i vettori, considerati come si è detto, come particolari forme geometriche di peso zero e quindi rappresentati come "differenze" di punti.

Consideriamo un vettore v, che venga geometricamente rappresentato con un segmento avente i suoi estremi in due punti A e B, orientato da A verso B (punta della freccia). Nella simbologia che stiamo per rappresentare il vettore viene rappresentato come una "differenza di punti", nella forma:

(1) $$v = B-A.$$

Il simbolo (1) può essere utilizzato con il rispetto di certe leggi sintattiche formali, che possono rendere facile ed agile la trattazione di vari problemi di geometria e di meccanica razionale.

Anzitutto si conviene di poter dedurre dalla (1) la relazione:

(2) $$B = A + v,$$

la quale può essere letta come esprimente il fatto che il punto B viene ottenuto da A applicando l'operazione di traslazione definita dal vettore v.

Il simbolo "+" viene interpretato come un simbolo di operazione appartenente ad un gruppo abeliano, operazione dotata quindi delle solite proprietà (commutativa ed associativa) di questi gruppi; coerentemente, l'elemento neutro di tale gruppo viene indicato con il simbolo "0" (zero).

Per il simbolo (1) si conviene anche di poter dar senso alla operazione di "Moltiplicazione per un numero reale"; precisamente indicato con k un numero reale qualsivoglia, si conviene di poter scrivere:

(3) $$kv = k(B-A);$$

ed anche per questo operazione di moltiplicazione di suppongono valide le due proprietà distributive del prodotto: rispetto alla somma dei numeri reali e rispetto alla somma dei vettori; in particolare, per $k = -1$ si ha:

$$(4) \qquad (-1)(B-A) = A-B.$$

Con queste convenzioni si può rappresentare il gruppo abeliano delle traslazioni della spazio; in particolare si hanno le relazioni:

$$(5) \qquad (A-B)+(B-A) = 0,$$

$$(A-B)+(B-C)+(C-A) = 0,$$

$$(A-A) = 0,$$

che appaiono come le immediate generalizzazioni formali delle (1) del paragrafo 3.0.

Si possono infine stabilire delle convenzioni per dare senso ad espressioni della forma:

$$(6) \qquad aA + bB + cC = P,$$

dove a, b, c sono numeri reali soddisfacenti alla relazione:

$$(7) \qquad a+b+c = 1.$$

Precisamente si conviene che il punto P che compare nella (6) sia tale che, quale che sia il punto Q, si abbia::

$$(8) \qquad P-Q = a(A-Q) + b(B-Q) + c(C-Q).$$

4.1 - Le convenzioni ora presentate e le leggi formali di calcolo sui simboli permettono di dimostrare agilmente certe proprietà delle figure e di risolvere problemi classici, nello spirito della geometria delle trasformazioni. Daremo qui di seguito qualche esempio caratteristico, ovviamente senza alcuna pretesa di completezza e di metodicità della trattazione.

Osserviamo anzitutto che, in base alla interpretazione ed al significato dei simboli, dati due punti A e B, il punto medio M del loro segmento è caratterizzato dal fatto che si ha:

$$(1) \qquad (M-A) + (M-B) = 0.$$

Segue di qui che, con le convenzioni stabilite sopra, tale punto medio può essere dato dalla espressione:

(2) $$M = (1/2)(A+B).$$

In modo analogo, se si hanno tre punti A, B, C, si può considerare il punto R, dato da

(3) $$R = (1/3)(A+B+C).$$

Se i tre punti A, B, C non sono allineati è noto che il punto R viene chiamato "baricentro" del triangolo che ha come vertici i tre punti. Ancora tenendo presenti i calcoli precedenti si verifica che i tre punti:

(4) $$A + (3/2)(R-A) \; ; \; B + (3/2)(R-B) \; ; \; C + (3/2)(R-C)$$

sono i punti medi dei tre lati del triangolo che hanno rispettivamente come estremi B e C, C ed A, A e B.

Pertanto i punti (4), congiunti ripettivamente con A, B, C forninscono le tre mediane del triangolo di vertici A, B, C.

4.2 - Lasciamo al lettore il facile esercizio di applicare i formalismi or ora presentati al caso in cui siano dati quattro punti: A, B, C, D dello spazio, in posizione tale che non appartengano ad un medesimo piano. Si ottengono così, in forza delle regole del formalismo adottato, le proprietà del tetraedro di cui abbiamo detto sopra nel paragrafo 3.2.

5.0 - Quella che viene chiamata la "geometria delle trasformazioni" permette di porre sotto una luce nuova le procedure classiche per la soluzione dei problemi geometrici. Un accenno a questa impostazione è stato fatto poco sopra (nel paragrafo 4.0) quando è stata interpretata la formula (2), che presenta la notazione vettoriale di Peano, anche come la espressione di una operazione sui punti dello spazio. In questo ordine di idee si possono interpretare anche le trattazioni dei paragrafi 4.1 e 4.2, e la soluzione dei problemi geometrici corrispondenti.

Un atteggiamento cosiffatto non è per nulla nuovo, ed anzi rientra nelle trattazioni classiche di matematiche elementari dal punto di vista superiore: si legga per esempio quanto si trova scritto nell'articolo intitolato

" Metodi per la risoluzione dei problemi geometrici" di Alfredo Sabbatini [Cfr. Federigo Enriques et al.:"Questioni riguardanti le matematiche elementari". (Bologna, 1928). Parte II, Art. XIII].

Del resto si potrebbe osservare che il classico metodo che già in Euclide viene chiamato "analisi" porta alla trasformazione di un problema dato in un altro; e, se necessario, di questo in un altro e così via fino a che si giunge ad un problema che si sa risolvere o che risulta chiaramente impossibile.

L'atteggiamento ispirato alla cosiddetta "Geometria delle trasformazioni" aggiunge a questi metodi classicamente noti la coscienza esplicita del fatto che le risoluzioni riguardano proprietà invarianti delle figure rispetto a certi gruppi di trasformmazioni; e che quindi la leggittimità e la validità delle soluzioni sono fondate sulla scelta del gruppo di trasformazioni che rende possibile e speso agevole la soluzione di un problema.

5.1 - Nell'ordine delle idee esposte poco fa, richiamiamo ciò che è stato detto nel paragrafo 7 della parte prima di questo scritto, a proposito della simmetria e del significato di questa proprietà delle figure, legata all'esistenza di gruppi di trasformazioni.

In questo ambito possiamo qui osservare che il concetto di simmetria si applica anche al di fuori geometria, e precisamente qualora abbia senso parlare di gruppi di trasformazioni. Per esempio è noto che nell'ambito dell'algebra, o dell'analisi matematica, si può introdurre il concetto di funzione simmetrica di più variabili: in questo caso il gruppo di trasformazioni che si prende in considerazione non è più un gruppo di operazioni su figure geometriche, ma un gruppo di sostituzioni di oggetti appartenenti ad un determinato insieme.

Diamo qui un esempio di applicazione di questi concetti alla soluzione algebrica dell'equazione di III grado; abitualmente questo problema viene risolto con ingegnosi espedienti di calcolo. In quella che stiamo per presentare viene invece fatto esplicito riferimento al concetto di simmetria di cui abbiamo detto.

Sia dunque data un'equazione algebrica di terzo grado, che supporremo ridotta alla forma canonica:

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0;$$

è noto che ogni equazione cubica può essere ridotta a questa forma con una classica operazione, molto semplice, che nella trattatistica abituale viene chiamata "trasformazione (dell'equazione) a radici aumentate".

Indichiamo con a, b, c le radici della (1) e ricordiamo che valgono le relazioni fondamentali tra le radici ed i coefficienti dell'equazione:

$$\begin{aligned} a+b+c&=0\\ ab+bc+ca&=p\\ abc&=-q. \end{aligned} \tag{2}$$

Consideriamo ora l'equazione che fornisce le radici cubiche dell'unità, e precisamente:

$$z^3-1 = (z-1)(z^2+z+1)=0. \tag{3}$$

In particolare ci interessano le due radici diverse da 1, cioè le radici dell'equazione algebrica di II grado:

$$z^2+z+1=0; \tag{4}$$

esse sono due numeri complessi coniugati, la cui espressione esplicita non interessa per ora, ma che si ottiene facilmente dalle formule classiche.

Consideriamo ora il sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite a, b, c:

$$\begin{aligned} a+b+c&=0\\ a+zb+z^2c&=u\\ a+z^2b+zc&=v. \end{aligned} \tag{5}$$

Da questo sistema, tenendo conto della (4), si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} a&=(u+v)/3\\ b&=(z^2u+zv)/3\\ c&=(zu+z^2v)/3 \end{aligned} \tag{6}$$

Si considerino ora tutte le possibili permutazioni tra i tre numeri a, b, c. E' noto che queste permutazioni formano un gruppo G di 6 operazioni (ivi compresa, ovviamente, l'identità) e si verifica facilmente che ogni operazione del gruppo può essere generata con due operazioni (generatrici) che possono essere per esempio: lo scambio di a con b che indicheremo col simbolo (ab), e lo scambio di a con c, che indicheremo col simbolo (ac).

Si osservino ora gli effetti degli scambi (ab) ed (ac) sulle funzioni u e v date dalle (5); si verifica immediatamente che:

α) lo scambio (ab) porta u in zv e v in z^2u;
β) lo scambio (ac) porta v in z^2u e v in zu.

Quindi, tenendo conto della (3), si ha che ogni operazione del gruppo G lascia invariato il prodotto uv e lascia pure invariata la somma u + v .

Si conclude pertanto che le due funzioni:

$$T = (uv)^3 \qquad W = u^3 + v^3 \tag{7}$$

sono invarianti per le operazioni del gruppo G, cioè sono, come suol dirsi, funzioni simmetriche delle radici della (1) e quindi (a norma di un classico teorema di Gauss) funzioni razionali dei coefficienti della (1).

Il calcolo delle espressioni che danno esplicitamente T e W come funzioni razionali di p e q non offre difficoltà concettuali; esso può venire facilitato notevolmente osservando che i risultati di tale calcolo debbono essere funzioni simmetriche dei loro argomenti; pertanto se nello sviluppo dei calcoli si incontra un determinato monomio negli argomenti a, b, c, debbono essere presenti anche tutti gli altri monomi che si ottengono eseguendo sugli argomenti le operazioni del gruppo G.

Si ottiene:

$$T = -27\,p^3 \qquad W = -27\,q. \tag{8}$$

E' quindi possibile costruire la equazione quadratica, che ha come radici u e v ; precisamente tale equazione è:

$$t^2 + 27qt - 27p^3 = 0. \tag{9}$$

E' noto che la (9) viene chiamata "risolvente quadratica" della (1); le radici cubiche delle sue radici, introdotte nelle (6), permettono di ritrovare le abituali espressioni delle soluzioni dell'equazione cubica.